В. К. ДОЛИНОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ СЕЧЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ПРОЦЕССА В НЕСТАЦИОНАРНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ СТОЛКНОВЕНИЙ С РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КИНЕМАТИКОЙ

Москва 2004

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Д. В. СКОБЕЛЬЦЫНА

КАФЕДРА ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА И КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ СТОЛКНОВЕНИЙ

В. К. ДОЛИНОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ СЕЧЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ПРОЦЕССА В НЕСТАЦИОНАРНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ СТОЛКНОВЕНИЙ С РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КИНЕМАТИКОЙ

Москва 2004

УДК 531.1(075.8)
ББК 22.21я73

Долинов В. К. Дифференциальное сечение элементарного процесса в нестационарной квантовой теории столкновений с релятивистской кинематикой. Учебное пособие.-М.:Изд-во Моск. ун-та, 2004. - 32 с.

Дан последовательный вывод одной из важнейших формул квантовой теории столкновений, связывающей дифференциальное сечение элементарного процесса с T-матрицей на энергетической поверхности. Вывод проведен в рамках нестационарной теории (пакетное описание состояний) для смешанного начального состояния системы применительно к такому определению дифференциального сечения, которое используется экспериментаторами.

В качестве примера применения полученной формулы рассмотрены дифференциальные сечения двухчастичного и трехчастичного процессов. Обсуждается связь угловых распределений продуктов реакции в координатном и импульсном пространствах.

Пособие предназначено для студентов и аспирантов физических факультетов.

©Долинов В. К., 2004

©НИИЯФ МГУ, 2004

1 Введение

Важнейшей характеристикой процесса столкновения частиц является дифференциальное сечение рассеяния. Именно оно обычно определяется в результате экспериментального исследования. С другой стороны, важнейшей характеристикой теоретического исследования процесса столкновения является T-матрица на энергетической поверхности. Взаимосвязь этих характеристик существенно зависит от экспериментальных условий приготовления пучка бомбардирующих частиц и частиц мишени, а также от свойств системы детектирования продуктов реакции.

Мы будем использовать следующее определение дифференциального сечения:

$$\frac{d\sigma^{\beta\alpha}}{d\Omega} = \frac{1}{n} \lim_{\Delta\Omega\to 0} \frac{N^{\beta}_{out}(\Delta\Omega)/N^{\alpha}_{in}}{\Delta\Omega}, \tag{1}$$

где $N^{\beta}_{out}(\Delta\Omega)$ — количество частиц-продуктов реакции, зарегистрированных детекторами в элементе $\Delta\Omega$ импульсного пространства выходного канала β реакции; N^{α}_{in} — количество частиц пучка, попавших на мишень во входном канале α за время эксперимента; n — количество частиц мишени, приходящихся на единицу площади плоскости Π, перпендикулярной оси пучка (поверхностная плотность мишени) (рис.1). При этом предполагается,что мишень однородна и имеет фиксированную толщину в той части, которая облучается пучком.

Рис. 1: Взаимное положение мишени и пучка бомбардирующих частиц. Заштрихована часть мишени, облучаемая пучком.

Определение (1) дифференциального сечения является общепринятым у экспериментаторов [1]. Оно несколько отличается от того определения, которому обычно следуют теоретики [2, 3, 4, 5, 7, 8]:

$$\left(\frac{d\sigma^{\beta\alpha}}{d\Omega}\right)_{theor} = \frac{1}{j^{\alpha}_{in}} \lim_{\Delta\Omega\to 0} \frac{J^{\beta}_{out}(\Delta\Omega)}{\Delta\Omega \cdot N}, \tag{2}$$

где $J^{\beta}_{out}(\Delta\Omega)$ — поток продуктов реакции, вылетающих в элемент $\Delta\Omega$ импульсного пространства выходного канала β, j^{α}_{in} — плотность потока бомбардирующих частиц, N — полное количество частиц мишени, облучаемых пучком.

Определение (1) является более общим: оно совпадает с определением (2) в том частном случае, когда плотность потока j^{α}_{in} падающих частиц одинакова по всей площади мишени и постоянна во времени.

Целью настоящей работы является вычисление дифференциального сечения согласно определению (1) в рамках нестационарной квантовой теории столкновений.

2 Оператор рассеяния S

Рассмотрим элементарный процесс столкновения

$$a + b \longrightarrow 1 + 2 + \cdots + N, \tag{3}$$

в результате которого образуются N свободных частиц, которые могут регистрироваться детектирующей системой. Входной канал этого процесса обозначим буквой α, а выходной канал буквой β.

Будем предполагать, что вектор $|\psi(t)\rangle$ состояния системы в момент времени t удовлетворяет уравнению Шредингера

$$\imath\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle, \qquad \hbar = 1, \tag{4}$$

где H — гамильтониан системы. Если H не зависит явно от времени, то вектор состояния в произвольный момент времени можно представить в виде

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t)\rangle, \tag{5}$$

где

$$U(t, t_0) = \exp(-\imath H(t - t_0)) \tag{6}$$

— оператор эволюции системы.

Выберем начало отсчета t_0 времени таким образом, чтобы взаимодействие сталкивающихся частиц a и b происходило в некоторой окрестности этой точки

и положим $t_0 = 0$. Тогда при $t \to -\infty$ гамильтониан системы можно взять в виде
$$H^\alpha = H - V^\alpha, \tag{7}$$
где V^α — оператор потенциальной энергии взаимодействия частиц в канале α. Это значит, что мы пренебрегаем взаимодействием частиц, находящихся на макроскопическом удалении друг от друга. Соответственно при $t \to +\infty$ можно пренебречь потенциальной энергией V^β взаимодействия частиц в выходном канале β и взять гамильтониан системы в виде

$$H^\beta = H - V^\beta. \tag{8}$$

Используя (5) при $t_0 = 0$, получаем

$$|\psi(t)\rangle_{t\to-\infty} = \exp(-\imath H^\alpha t)|\psi^\alpha_{in}\rangle, \quad |\psi(t)\rangle_{t\to+\infty} = \exp(-\imath H^\beta t)|\psi^\beta_{out}\rangle, \tag{9}$$

где $|\psi^\alpha_{in}\rangle$ — состояние, в которое перешла бы система в момент $t = 0$, если бы оставалась в канале α с гамильтонианом H^α; $|\psi^\beta_{out}\rangle$ — состояние, в котором система была бы в момент $t = 0$, если бы находилась в канале β с гамильтонианом H^β. Будем называть $|\psi^\alpha_{in}\rangle$и $|\psi^\beta_{out}\rangle$ входной и выходной *асимптотами* в каналах α и β, соответственно. Каждая из них однозначно определяет истинное состояние рассеяния $|\psi(t)\rangle$ в любой момент времени. Действительно, из (9) и (5) имеем
$$\exp(-\imath Ht)|\psi(0)\rangle_{t\to-\infty} = \exp(-\imath H^\alpha t)|\psi^\alpha_{in}\rangle,$$
$$\exp(-\imath Ht)|\psi(0)\rangle_{t\to+\infty} = \exp(-\imath H^\beta t)|\psi^\beta_{out}\rangle,$$
откуда получаем
$$|\psi(0)\rangle = \Omega^\alpha_+|\psi^\alpha_{in}\rangle = \Omega^\beta_-|\psi^\beta_{out}\rangle, \tag{10}$$
где введены *меллеровские волновые операторы* [7]

$$\Omega^\gamma_\pm = \lim_{t\to\mp\infty} \exp(\imath Ht)\exp(-\imath H^\gamma t), \quad \gamma = \alpha, \beta, \tag{11}$$

которые отображают асимптоты на истинное состояние системы при $t = 0$. Из (5) и (10) находим вектор состояния в произвольный момент времени

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-\imath Ht)|\psi(0)\rangle = \exp(-\imath Ht)\Omega^\alpha_+|\psi^\alpha_{in}\rangle = \exp(-\imath Ht)\Omega^\beta_-|\psi^\beta_{out}\rangle. \tag{12}$$

Все эти векторы описывают физические состояния, а поэтому принадлежат пространству $\mathcal{L}_2$ квадратично интегрируемых функций.

Любую асимптоту в канале γ в координатном представлении можно записать в виде
$$\psi^\gamma_{asymp}(\cdot) = \Phi^\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_{n_\gamma}) \prod_{i=1}^{n_\gamma} \phi^\gamma_i(\xi_i)\chi^\gamma_i(\sigma_i), \tag{13}$$

где $\{\vec{r}_i\}_{i=1}^{n_\gamma}$ — координаты центров масс n_γ частиц канала γ, $\{\xi_i\}_{i=1}^{n_\gamma}$ — пространственные координаты субчастиц, входящих в состав каждой из свободных частиц канала γ, $\{\sigma_i\}_{i=1}^{n_\gamma}$ — их спиновые координаты, $\{\phi_i^\gamma(\xi_i)\}_{i=1}^{n_\gamma}$ — волновые функции, описывающие внутреннее орбитальное движение свободных частиц, $\{\chi_i^\gamma(\sigma_i)\}_{i=1}^{n_\gamma}$ — соответствующие спиновые функции, $\Phi^\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_{n_\gamma})$ — функция, описывающая свободное движение центров масс частиц в канале γ.

Начальное состояние системы, в котором сталкивающиеся частицы a и b находятся на макроскопическом расстоянии друг от друга, определяется процедурой приготовления пучка и мишени и задается входной асимптотой $|\psi_{in}^\alpha\rangle$. Тем самым согласно (12) однозначно определяется состояние системы $|\psi(t)\rangle$ в произвольный момент времени t. Если продукты реакции (3) при $t \to +\infty$ подвергаются некоторой процедуре измерения (регистрации), которой может быть поставлен в соответствие некоторый вектор $|\phi(t)\rangle = \exp(-\imath H^\beta t)|\psi_{out}^\beta\rangle$, то можно говорить о вероятности перехода системы в результате этого измерения из начального состояния, задаваемого входной асимптотой $|\psi_{in}^\alpha\rangle$, в конечное состояние, задаваемое выходной асимптотой $|\psi_{out}^\beta\rangle$. Амплитуда этого перехода есть

$$\mathcal{A}(\psi_{out}^\beta \leftarrow \psi_{in}^\alpha) = \lim_{t\to\infty}\langle\phi(t)|\psi(t)\rangle = \lim_{t\to\infty}\langle\exp(-\imath H^\beta t)\psi_{out}^\beta|\exp(-\imath Ht)\Omega_+^\alpha\psi_{in}^\alpha\rangle =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\langle\psi_{out}^\beta|(\exp(\imath Ht)\exp(-\imath H^\beta t))^+\Omega_+^\alpha\psi_{in}^\alpha\rangle,$$

т.е.

$$\mathcal{A}(\psi_{out}^\beta \leftarrow \psi_{in}^\alpha) = \langle\psi_{out}^\beta|S^{\beta\alpha}|\psi_{in}^\alpha\rangle, \tag{14}$$

где

$$S^{\beta\alpha} \equiv (\Omega_-^\beta)^+\Omega_+^\alpha \tag{15}$$

называется *оператором рассеяния* [5] из канала α в канал β или S-*оператором*. Матрица оператора $S^{\beta\alpha}$ называется S-*матрицей*.

3 Интегралы движения

Введем *импульсный базис* в канале γ в координатном представлении в следующем виде:

$$\langle\{\vec{r}_i, \xi_i, \sigma_i\}_{i=1}^{n_\gamma}|\{\vec{p}_i\}_{i=1}^{n_\gamma}, \gamma\rangle = \prod_{i=1}^{n_\gamma}\frac{\exp(\imath\vec{p}_i\vec{r}_i)}{(2\pi)^{3/2}}\phi_i^\gamma(\xi_i)\chi_i^\gamma(\sigma_i), \tag{16}$$

где $\{\vec{p}_i\}_{i=1}^{n_\gamma}$ — импульсы свободных частиц, буквой γ обозначена совокупность всех остальных квантовых чисел, задающих базисное состояние в этом канале. Эти векторы являются обобщенными собственными векторами канального гамильтониана H^γ

$$H^\gamma|\underline{p}, \gamma\rangle = E_{\underline{p}}^\gamma|\underline{p}, \gamma\rangle, \tag{17}$$

где

$$\underline{p} = \{\vec{p}_i\}_{i=1}^{n_\gamma}, \quad E_{\underline{p}}^{\gamma} = \sum_{i=1}^{n_\gamma} (\vec{p}_i{}^2 + (m_i^\gamma)^2))^{1/2} \tag{18}$$

— суммарная полная энергия в канале γ, $\{m_i^\gamma\}_1^{n_\gamma}$ — массы свободных частиц, определяющие их внутреннюю энергию. Векторы (16) удовлетворяют обобщенному условию ортонормированности

$$\langle \underline{p}, \gamma | \underline{p}', \gamma' \rangle = \delta_{\gamma\gamma'} \delta(\underline{p} - \underline{p}'), \tag{19}$$

где

$$\delta(\underline{p} - \underline{p}') = \prod_{i=1}^{n_\gamma} \delta(\vec{p}_i - \vec{p}_i{}'). \tag{20}$$

Докажем следующее "соотношение переброса"для меллеровских операторов

$$H\Omega_\pm^\gamma = \Omega_\pm^\gamma H^\gamma. \tag{21}$$

Имеем для произвольного вещественного параметра τ

$$\exp(\imath H\tau)\Omega_\pm^\gamma = \exp(\imath H\tau) \lim_{|t|\to\infty} (\exp(\imath Ht)\exp(-\imath H^\gamma t)) =$$

$$= \lim_{|t|\to\infty} (\exp(\imath H(\tau + t))\exp(-\imath H^\gamma(\tau + t)))\exp(\imath H^\gamma \tau) = \Omega_\pm^\gamma \exp(\imath H^\gamma \tau),$$

т.е.

$$\exp(\imath H\tau)\Omega_\pm^\gamma = \Omega_\pm^\gamma \exp(\imath H^\gamma \tau).$$

Дифференцируя это соотношение по τ, получаем

$$H\exp(\imath H\tau)\Omega_\pm^\gamma = \Omega_\pm^\gamma H^\gamma \exp(\imath H^\gamma \tau).$$

Полагая здесь $\tau = 0$, получаем (21).

Матрица оператора $S^{\beta\alpha}$ рассеяния в импульсном базисе (16) согласно (15) имеет вид

$$\langle \underline{p}'\beta | S^{\beta\alpha} | \underline{p}\alpha \rangle = \langle \underline{p}'\beta | (\Omega_-^\beta)^+ \Omega_+^\alpha | \underline{p}\alpha \rangle.$$

Используя (17) и (21), получаем отсюда с учетом эрмитовости H и H^γ

$$E_{\underline{p}}^\alpha \langle \underline{p}'\beta | S^{\beta\alpha} | \underline{p}\alpha \rangle = \langle \underline{p}'\beta | (\Omega_-^\beta)^+ \Omega_+^\alpha H^\alpha | \underline{p}\alpha \rangle = \langle \underline{p}'\beta | (\Omega_-^\beta)^+ H\Omega_+^\alpha | \underline{p}\alpha \rangle =$$

$$= \langle \underline{p}'\beta | (H\Omega_-^\beta)^+ \Omega_+^\alpha | \underline{p}\alpha \rangle = \langle \underline{p}'\beta | H^\beta (\Omega_-^\beta)^+ \Omega_+^\alpha | \underline{p}\alpha \rangle = E_{\underline{p}'}^\beta \langle \underline{p}'\beta | S^{\beta\alpha} | \underline{p}\alpha \rangle.$$

Следовательно,

$$(E_{\underline{p}}^\alpha - E_{\underline{p}'}^\beta) \langle \underline{p}'\beta | S^{\beta\alpha} | \underline{p}\alpha \rangle = 0. \tag{22}$$

Отсюда следует, что матричный элемент равен нулю, если $E_{\underline{p}}^\alpha \neq E_{\underline{p}'}^\beta$, т.е. если не сохраняется полная энергия в переходе между начальным и конечным состояниями (при $t \to \pm\infty$).

Поскольку все взаимодействия в изолированной системе зависят только от относительных координат частиц, гамильтониан H является трансляционно инвариантным. Оператор пространственного смещения на вектор $\vec{\rho}$ имеет вид

$$T_{\vec{\rho}} = \exp(-\imath\vec{\rho}\vec{\mathcal{P}}), \tag{23}$$

где $\vec{\mathcal{P}} = \sum_i \vec{p}_i$ оператор полного импульса системы. Следовательно,

$$[H, T_{\vec{\rho}}] = 0, \quad [H, \vec{\mathcal{P}}] = 0. \tag{24}$$

Из (11),(15) и (24) получаем

$$[S^{\beta\alpha}, \vec{\mathcal{P}}] = 0. \tag{25}$$

Вычислим матрицу этого коммутатора в импульсном представлении

$$\langle \underline{p}'\beta|[S^{\beta\alpha}, \vec{\mathcal{P}}]|\underline{p}\alpha\rangle = \langle \underline{p}'\beta|S^{\beta\alpha}\vec{\mathcal{P}} - \vec{\mathcal{P}}S^{\beta\alpha}|\underline{p}\alpha\rangle = (\vec{P} - \vec{P}')\langle \underline{p}'\beta|S^{\beta\alpha}|\underline{p}\alpha\rangle.$$

Учитывая (25), получаем отсюда

$$(\vec{P} - \vec{P}')\langle \underline{p}'\beta|S^{\beta\alpha}|\underline{p}\alpha\rangle = 0, \tag{26}$$

где

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \vec{p}_i, \quad \vec{P}' = \sum_{i=1}^{n_\beta} \vec{p}_i{}' \tag{27}$$

— полные импульсы в начальном и конечном состояниях. Следовательно, матричный элемент равен нулю, если не сохраняется полный импульс в этом переходе.

4 Оператор перехода $\mathcal{T}$ и T-матрица

Выделяя из оператора рассеяния S единичный оператор I, соответствующий отсутствию рассеяния, вводим оператор $\mathcal{R}$ с помощью следующего определения:

$$S = I - 2\pi\imath\mathcal{R}. \tag{28}$$

Поскольку $\mathcal{R}$ удовлетворяет тем же коммутационным соотношениям, что S, используя (22) и (26), получаем его матрицу в импульсном представлении в виде

$$\langle \underline{p}'\beta|\mathcal{R}^{\beta\alpha}|\underline{p}\alpha\rangle = \delta(E^{\beta}_{\underline{p}'} - E^{\alpha}_{\underline{p}})\delta(\vec{P}' - \vec{P})\langle \underline{p}'\beta|T^{\beta\alpha}|\underline{p}\alpha\rangle, \tag{29}$$

где введена матрица $\langle \underline{p}'\beta|T^{\beta\alpha}|\underline{p}\alpha\rangle$, определенная только на *энергетической поверхности*, т.е. только для тех базисных векторов, которые сохраняют полные энергию и импульс. Учитывая (19) и (29) , получаем матрицу оператора рассеяния S в виде

$$\langle \underline{p}'\beta|S^{\beta\alpha}|\underline{p}\alpha\rangle = \delta_{\beta\alpha}\delta(\underline{p}-\underline{p}') - 2\pi\imath\delta(E^{\beta}_{\underline{p}'} - E^{\alpha}_{\underline{p}})\delta(\vec{P}' - \vec{P})\langle \underline{p}'\beta|T^{\beta\alpha}|\underline{p}\alpha\rangle. \quad (30)$$

В теории рассеяния [8] показывается, что матрица $\langle \underline{p}'\beta|T^{\beta\alpha}|\underline{p}\alpha\rangle$ может быть вычислена с помощью соотношения

$$\langle \underline{p}'\beta|T^{\beta\alpha}|\underline{p}\alpha\rangle\delta(\vec{P}' - \vec{P}) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\langle \underline{p}'\beta|\mathcal{T}^{\beta\alpha}(E^{\alpha}_{\underline{p}} + \imath\varepsilon)|\underline{p}\alpha\rangle, \quad (31)$$

где

$$\mathcal{T}^{\beta\alpha}(z) = V^{\alpha} + V^{\beta}(z-H)^{-1}V^{\alpha}, \quad (32)$$

H — гамильтониан системы, V^{α} — потенциальная энергия взаимодействия частиц во входном канале α, V^{β} — потенциальная энергия взаимодействия в выходном канале β, z — комплексная переменная; δ-функция в (31) выражает сохранение полного импульса $\vec{P}$ системы, что является прямым следствием равенства $[\mathcal{T}^{\beta\alpha}(z), \vec{\mathcal{P}}] = 0$, вытекающего из (24) и (32).

Оператор $\mathcal{T}^{\beta\alpha}(z)$ называется *оператором перехода* [5] из канала α в канал β или $\mathcal{T}$-*оператором*, а матрица $\langle \underline{p}'\beta|T^{\beta\alpha}|\underline{p}\alpha\rangle$ называется T-*матрицей*.

5 Вычисление дифференциального сечения

Для вычисления дифференциального сечения по формуле (1) надо найти

$$W^{\beta\alpha} = N^{\beta}_{out}(\Delta\Omega)/N^{\alpha}_{in}. \quad (33)$$

Эта величина имеет смысл вероятности перехода системы из входного канала α в элемент $\Delta\Omega$ импульсного пространства выходного канала β. Этот процесс обусловлен взаимодействием бомбардирующей частицы со всеми теми N_T частицами мишени, которые находятся в области пространственной локализации пучковой частицы. Пренебрегая всеми эффектами когерентности в процессе рассеяния на различных частицах мишени, получаем

$$W^{\beta\alpha} = \sum_{i=1}^{N_T} w^{\beta\alpha}(\vec{\rho}_i), \quad (34)$$

где $w^{\beta\alpha}(\vec{\rho}_i)$ — вероятность перехода за счет взаимодействия пучковой частицы с частицей мишени, среднее значение координаты центра масс которой дается вектором $\vec{\rho}_i$.

Для вычисления $w^{\beta\alpha}(\vec{\rho}_i)$ воспользуемся основным постулатом квантовой механики ([6, 2]), согласно которому вероятность того, что физическая величина

F в состоянии, описываемом статистическим оператором ρ, лежит в интервале Δ, дается формулой

$$\mathrm{Pr}_F(\Delta) = \mathrm{Sp}(\rho \Pi_F(\Delta)), \tag{35}$$

где $\Pi_F(\Delta)$ — оператор проектирования на линейное пространство, натянутое на собственные векторы $|F_i\rangle$ эрмитова оператора F, принадлежащие собственным значениям $F_i \in \Delta$, т.е.

$$\Pi_F(\Delta) = \sum_{F_i \in \Delta} |F_i\rangle\langle F_i|. \tag{36}$$

Используя произвольный ортонормированный базис $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$, получаем

$$\mathrm{Pr}_F(\Delta) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \phi_k|\rho\Pi_F(\Delta)|\phi_k\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \phi_k|\rho[\sum_{F_i \in \Delta} |F_i\rangle\langle F_i|]|\phi_k\rangle =$$

$$= \sum_{F_i \in \Delta} \sum_{k=1}^{\infty} \langle F_i|\phi_k\rangle\langle \phi_k|\rho|F_i\rangle = \sum_{F_i \in \Delta} \langle F_i|\rho|F_i\rangle,$$

т.е.

$$\mathrm{Pr}_F(\Delta) = \sum_{F_i \in \Delta} \langle F_i|\rho|F_i\rangle. \tag{37}$$

Формулы (36,37) применимы только для физических величин, операторы которых имеют чисто дискретные спектры. Если спектр оператора F непрерывный, а условие полноты его обобщенных собственных векторов имеет вид

$$\int dF\, |F\rangle\langle F| = I,$$

вместо (36) следует использовать

$$\Pi_F(\Delta) = \int_{\Delta} dF\, |F\rangle\langle F|,$$

а вместо (37) получим

$$\mathrm{Pr}_F(\Delta) = \int_{\Delta} dF\, \langle F|\rho|F\rangle. \tag{38}$$

Если операторы F и G двух физических величин коммутируют, существует полный ортонормированный набор их совместных обобщенных собственных векторов $|FG\rangle$. Предположим, что F имеет непрерывный спектр, а G дискретный спектр. Тогда условие полноты этого набора имеет вид

$$\int dF \sum_i |FG_i\rangle\langle FG_i| = I, \tag{39}$$

а соответствующий проектор можно записать в виде

$$\Pi_{FG}(\Delta_F, \Delta_G) = \int_{\Delta_F} dF \sum_{G_i \in \Delta_G} |FG_i\rangle\langle FG_i|. \tag{40}$$

Вероятность того, что результаты измерения физических величин F и G в состоянии ρ будут находиться в интервалах Δ_F и Δ_G, согласно (35) дается формулой

$$\mathrm{Pr}(\Delta_F, \Delta_G) = \int\limits_{\Delta_F} dF \sum_{G_i \in \Delta_G} \langle FG_i|\rho|FG_i\rangle. \tag{41}$$

Обозначим ρ_0 статистический оператор входного состояния системы в процессе рассеяния (3), под которым мы будем понимать состояние системы в момент времени $t = 0$ при условии, что при $t \leq 0$ эволюция системы происходила под действием оператора $\exp(-\imath H^\alpha t)$, где H^α — гамильтониан входного канала α. Оператор H^α описывает свободное движение частиц в канале α, при котором сохраняются все величины γ_α, операторы которых коммутируют с H^α. В частности, это импульсы и проекции спинов сталкивающихся частиц на произвольную ось квантования. Оператор ρ_0 по определению является положительно определенным эрмитовым оператором с единичным следом, а поэтому может быть представлен в виде

$$\rho_0 = \sum_{\gamma_\alpha} W_{\gamma_\alpha} |\psi_{\gamma_\alpha}\rangle\langle\psi_{\gamma_\alpha}|, \tag{42}$$

где $|\psi_{\gamma_\alpha}\rangle$ — квадратично интегрируемое состояние, характеризуемое некоторым полным набором квантовых чисел γ_α, $W_{\gamma_\alpha} \geq 0$ — статистический вес состояния $|\psi_{\gamma_\alpha}\rangle$ в смеси ρ_0, причем

$$\sum_{\gamma_\alpha} W_{\gamma_\alpha} = 1. \tag{43}$$

Состояния $|\psi_{\gamma_\alpha}\rangle$ играют роль входных асимптот $|\psi^\alpha_{in}\rangle$, а поэтому истинное состояние системы в произвольный момент времени t согласно (12) может быть представлено в виде

$$\rho(t) = \sum_{\gamma_\alpha} W_{\gamma_\alpha} |\psi_{\gamma_\alpha}(t)\rangle\langle\psi_{\gamma_\alpha}(t)|, \tag{44}$$

где

$$|\psi_{\gamma_\alpha}(t)\rangle = \exp(-\imath H t)\Omega^\alpha_+|\psi_{\gamma_\alpha}\rangle.$$

Рассмотрим регистрацию продуктов реакции с помощью детекторной системы, измеряющей импульс $\vec{p}_i$ и проекцию m_i спина каждого продукта. Все эти величины сохраняются при свободном движении частиц. Поэтому их распределение в асимптотической области ($t \to \infty$) не зависит от момента t времени измерения. Проектор этого измерения согласно (9) и (40) имеет вид

$$\Pi(t, \{\Delta_i\}_1^N, \{m_i\}_1^N, \beta) =$$
$$= \int\limits_{\Delta_1} d^3p_1 \int\limits_{\Delta_2} d^3p_2 \ldots \int\limits_{\Delta_N} d^3p_N \, e^{-\imath H^\beta t}|\underline{p}, \underline{m}, \beta\rangle\langle\underline{p}, \underline{m}, \beta|e^{\imath H^\beta t}, \tag{45}$$

где

$$\underline{p} \equiv \{\vec{p}_i\}_{i=1}^N, \qquad \underline{m} \equiv \{m_i\}_{i=1}^N,$$

$$\sum_{\underline{m}\beta} \int |\underline{p}, \underline{m}, \beta\rangle \langle \underline{p}, \underline{m}, \beta| \, d^3\underline{p} = I.$$

Этот проектор соответствует измерению импульсов свободных частиц с неопределенностями $\{\Delta_i\}_1^N$, точному измерению проекций спинов $\{m_i\}_1^N$ и точному определению внутреннего состояния каждого продукта реакции, которое задается квантовым числом β.

Подставляя (44) и (45) в (35) с использованием (41), находим вероятность указанного результата измерения при $t \to \infty$:

$$\Pr(\{\Delta_i\}_1^N, \{m_i\}_1^N, \beta) =$$

$$= \sum_{\gamma_\alpha} W_{\gamma_\alpha} \int\limits_{\Delta} d^3\underline{p} \langle \underline{p}, \underline{m}, \beta| e^{\imath H^\beta t} |\psi_{\gamma_\alpha}(t)\rangle_{t\to\infty} \langle \psi_{\gamma_\alpha}(t)| e^{-\imath H^\beta t} |\underline{p}, \underline{m}, \beta\rangle_{t\to\infty}, \tag{46}$$

где

$$\int\limits_{\Delta} d^3\underline{p} = \int\limits_{\Delta_1} d^3p_1 \int\limits_{\Delta_2} d^3p_2 \ldots \int\limits_{\Delta_N} d^3p_N,$$

$$\langle \underline{p}, \underline{m}, \beta| e^{\imath H^\beta t} |\psi_{\gamma_\alpha}(t)\rangle_{t\to\infty} = \langle \underline{p}, \underline{m}, \beta| e^{\imath H^\beta t} e^{-\imath H t} \Omega_+^\alpha |\psi_{\gamma_\alpha}\rangle_{t\to\infty} =$$

$$= \langle \underline{p}, \underline{m}, \beta| S^{\beta\alpha} |\psi_{\gamma_\alpha}\rangle,$$

$$\langle \psi_{\gamma_\alpha}(t)| e^{-\imath H^\beta t} |\underline{p}, \underline{m}, \beta\rangle_{t\to\infty} = \langle \psi_{\gamma_\alpha}| (S^{\beta\alpha})^+ |\underline{p}, \underline{m}, \beta\rangle.$$

Здесь были использованы соотношения (11),(12) и (15). Следовательно,

$$\Pr(\{\Delta_i\}_1^N, \{m_i\}_1^N, \beta) = \int\limits_{\Delta} d^3\underline{p} \sum_{\gamma_\alpha} \langle \underline{p}, \underline{m}, \beta| S^{\beta\alpha} |\psi_{\gamma_\alpha}\rangle W_{\gamma_\alpha} \langle \psi_{\gamma_\alpha}| (S^{\beta\alpha})^+ |\underline{p}, \underline{m}, \beta\rangle.$$

Используя (42), получаем

$$\Pr(\{\Delta_i\}_1^N, \{m_i\}_1^N, \beta) = \int\limits_{\Delta} d^3\underline{p} \langle \underline{p}, \underline{m}, \beta| S^{\beta\alpha} \rho_0 (S^{\beta\alpha})^+ |\underline{p}, \underline{m}, \beta\rangle. \tag{47}$$

Эта формула является базовой для вычисления дифференциального сечения.

Статистический оператор ρ_0 входного состояния описывает систему двух невзаимодействующих частиц — пучковую частицу (B) и частицу мишени (T), центр масс которой локализован в точке $\vec{\rho}_T$. Поскольку эти частицы приготавливаются в разных экспериментальных устройствах, все их характеристики взаимно независимы. Поэтому ρ_0 можно представить в факторизованном виде [6], т.е. в виде тензорного произведения операторов

$$\rho_0 = \rho_B \otimes \rho_T. \tag{48}$$

Поскольку внутреннее движение каждой из этих частиц не зависит от движения центров масс, статистические операторы частиц можно так же факторизовать:

$$\rho_i = \rho_i^{(cm)} \otimes \rho_i^{(inner)}, \qquad i = B, T, \tag{49}$$

где $\rho_i^{(cm)}$ — статистический оператор центра масс частицы i, $\rho_i^{(inner)}$ — статистический оператор внутреннего состояния частицы i.

Далее предположим, что каждая частица находится в основном состоянии внутреннего орбитального движения $|\alpha_i^0\rangle$, характеризуемого совокупностью квантовых чисел α_i^0. Тогда $\rho_i^{(inner)}$ также можно представить в факторизованном виде

$$\rho_i^{(inner)} = \rho_i^{(orb)} \otimes \rho_i^{(spin)}, \qquad i = B, T, \tag{50}$$

где

$$\rho_i^{(orb)} = |\alpha_i^0\rangle\langle\alpha_i^0| \tag{51}$$

— статистический оператор орбитального состояния частицы i, $\rho_i^{(spin)}$ — статистический оператор ее спинового состояния. Подставляя (50) в (49), получаем

$$\rho_i = \rho_i^{(cm)} \otimes \rho_i^{(orb)} \otimes \rho_i^{(spin)}, \qquad i = B, T. \tag{52}$$

Для простоты предположим, что состояния движения центров масс являются чистыми и описываются векторами $|a_i\rangle$, т.е.

$$\rho_i^{(cm)} = |a_i\rangle\langle a_i|. \tag{53}$$

Обозначим $G_B(\vec{r})$ волновую функцию центра масс пучковой частицы B в координатном представлении, а $G_T(\vec{r})$ волновую функцию центра масс частицы мишени T в том же представлении, предполагая, что обе частицы локализованы в окрестности начала координат $\vec{r} = 0$.

Функцию $G_i(\vec{r}), i = B, T$ можно взять, например, в виде

$$G_i(\vec{r}) = (\pi\delta^2)^{-3/4} \exp(-r^2/(2\delta^2)) \exp(\imath\langle\vec{q}\rangle\vec{r}),$$

где $\vec{r}$ — координата центра масс частицы, δ^2 — дисперсия координатного распределения, $\langle\vec{q}\rangle$ — среднее значение импульса. Эта функция нормирована на единицу

$$\int |G_i(\vec{r})|^2 \, d^3r = 1,$$

а параметры δ и $\langle\vec{q}\rangle$ определяются процедурами приготовления пучка и мишени.

В импульсном представлении волновая функция этого состояния принимает вид

$$a_i(\vec{q}) = (2\pi)^{-3/2} \int \exp(-\imath\vec{q}\vec{r}) G_i(\vec{r}) \, d^3r = (\delta/\sqrt{\pi})^{3/2} \exp(-\frac{\delta^2}{2}(\vec{q} - \langle\vec{q}\rangle)^2). \tag{54}$$

Волновая функция частицы-мишени, локализованной в окрестности точки $\vec{\rho}_T$, получается из $a_T(\vec{q})$ с помощью оператора (23)пространственного сдвига

$$a_{\vec{\rho}_T}(\vec{q}) = T_{\vec{\rho}_T} a_T(\vec{q}) = \exp(-\imath\vec{\rho}_T\vec{\mathcal{P}}) a_T(\vec{q}) = \exp(-\imath\vec{\rho}_T\vec{q}) a_T(\vec{q}). \tag{55}$$

Обозначим $\vec{q}_B, \vec{q}_T$ импульсы частиц B и T; κ_B, κ_T — проекции их спинов на некоторую ось квантования; α_B, α_T — квантовые числа состояний внутреннего орбитального движения частиц. Тогда матрицы операторов ρ_B и ρ_T, определяемых формулами (51),(52) и (53), можно представить в виде

$$\langle \vec{q}_B, \kappa_B, \alpha_B|\rho_B|\vec{q}_B{}', \kappa'_B, \alpha'_B\rangle = a_B(\vec{q}_B)a^*_B(\vec{q}_B{}')\langle\alpha_B|\alpha^0_B\rangle\langle\alpha^0_B|\alpha'_B\rangle\langle\kappa_B|\rho_B^{(spin)}|\kappa'_B\rangle,$$

$$\langle \vec{q}_T, \kappa_T, \alpha_T|\rho_T|\vec{q}_T{}', \kappa'_T, \alpha'_T\rangle = a_{\vec{\rho}_T}(\vec{q}_T)a^*_{\vec{\rho}_T}(\vec{q}_T{}')\langle\alpha_T|\alpha^0_T\rangle\langle\alpha^0_T|\alpha'_T\rangle\langle\kappa_T|\rho_T^{(spin)}|\kappa'_T\rangle.$$

Используя эти выражения, получаем матрицу оператора (48)

$$\langle \vec{q}_B, \kappa_B, \alpha_B; \vec{q}_T, \kappa_T, \alpha_T|\rho_0|\vec{q}_B{}', \kappa'_B, \alpha'_B; \vec{q}_T{}', \kappa'_T, \alpha'_T\rangle =$$
$$= a_B(\vec{q}_B)a^*_B(\vec{q}_B{}')a_{\vec{\rho}_T}(\vec{q}_T)a^*_{\vec{\rho}_T}(\vec{q}_T{}')\langle\kappa_B|\rho_B^{(spin)}|\kappa'_B\rangle\langle\kappa_T|\rho_T^{(spin)}|\kappa'_T\rangle\times$$
$$\times\delta_{\alpha_B\alpha'_B}\delta_{\alpha_B\alpha^0_B}\delta_{\alpha_T\alpha'_T}\delta_{\alpha_T\alpha^0_T}. \qquad (56)$$

Это есть матрица плотности входного состояния. Используя ее, приводим матричный элемент из выражения (47) к виду

$$\langle \underline{p}, \underline{m}, \beta|S^{\beta\alpha}\rho_0(S^{\beta\alpha})^+|\underline{p}, \underline{m}, \beta\rangle = \sum_{\kappa_B\kappa_T\kappa'_B\kappa'_T}\langle\kappa_B|\rho_B^{(spin)}|\kappa'_B\rangle\langle\kappa_T|\rho_T^{(spin)}|\kappa'_T\rangle\times$$
$$\times\int d^3q_Bd^3q_T\langle\underline{p}, \underline{m}, \beta|S^{\beta\alpha}|\vec{q}_B, \kappa_B, \alpha^0_B; \vec{q}_T, \kappa_T, \alpha^0_T\rangle a_B(\vec{q}_B)a_{\vec{\rho}_T}(\vec{q}_T)\times$$
$$\times\left[\int d^3q'_Bd^3q'_T\langle\underline{p}, \underline{m}, \beta|S^{\beta\alpha}|\vec{q}_B{}', \kappa'_B, \alpha^0_B; \vec{q}_T{}', \kappa'_T, \alpha^0_T\rangle a_B(\vec{q}_B{}')a_{\vec{\rho}_T}(\vec{q}_T{}')\right]^*. \qquad (57)$$

Выражая S-матрицу через T-матрицу с помощью (30), получаем

$$\int d^3q_Bd^3q_T\langle\underline{p}, \underline{m}, \beta|S^{\beta\alpha}|\vec{q}_B, \kappa_B, \alpha^0_B; \vec{q}_T, \kappa_T, \alpha^0_T\rangle a_B(\vec{q}_B)a_{\vec{\rho}_T}(\vec{q}_T) = J_1 + J_2, \qquad (58)$$

где

$$J_1 \equiv \delta_{\alpha\beta}\delta_{m_1\kappa_B}\delta_{m_2\kappa_T}\int d^3q_Bd^3q_T\delta(\vec{p}_1 - \vec{q}_B)\delta(\vec{p}_2 - \vec{q}_T)a_B(\vec{q}_B)a_{\vec{\rho}_T}(\vec{q}_T) =$$
$$= \delta_{\alpha\beta}\delta_{m_1\kappa_B}\delta_{m_2\kappa_T}a_B(\vec{p}_1)a_{\vec{\rho}_T}(\vec{p}_2), \qquad (59)$$

$$J_2 \equiv -2\pi\imath\int d^3q_Bd^3q_T\langle\underline{p}, \underline{m}, \beta|T^{\beta\alpha}|\vec{q}_B, \kappa_B, \alpha^0_B; \vec{q}_T, \kappa_T, \alpha^0_T\rangle\times$$
$$\times\delta(E^\beta_{\underline{p}} - E^\alpha_{\underline{q}})\delta(\vec{P} - \vec{Q})a_B(\vec{q}_B)a_{\vec{\rho}_T}(\vec{q}_T), \qquad (60)$$

где

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i, \quad \vec{Q} = \vec{q}_B + \vec{q}_T.$$

В выражении (47) содержится интегрирование по заданной области Δ в импульсном пространстве продуктов реакции. Обычно детекторы продуктов реакции располагаются вне области попадания пучковых частиц. Поэтому в области

$\vec{p}_1 \in \Delta_1$ имеем $a_B(\vec{p}_1) = 0$, а вклад J_1 в интеграл (58) исчезает. Подставляя (58) в (57), приводим (47) к следующему виду

$$\Pr(\{\Delta_i\}_1^N, \{m_i\}_1^N, \beta) = (2\pi)^2 \int_\Delta d^3\underline{p} \sum_{\kappa_B \kappa_T \kappa'_B \kappa'_T} \langle \kappa_B | \rho_B^{(spin)} | \kappa'_B \rangle \langle \kappa_T | \rho_T^{(spin)} | \kappa'_T \rangle \times$$
$$\times \int d^3q_B d^3q_T \langle \underline{p}, \underline{m}, \beta | T^{\beta\alpha} | \vec{q}_B, \kappa_B, \alpha_B^0; \vec{q}_T, \kappa_T, \alpha_T^0 \rangle \times$$
$$\times \delta(E_{\underline{p}}^\beta - E_{\underline{q}}^\alpha) \delta(\vec{P} - \vec{Q}) a_B(\vec{q}_B) a_{\vec{\rho}_T}(\vec{q}_T) \times$$
$$\times \int d^3q'_B d^3q'_T \langle \underline{p}, \underline{m}, \beta | T^{\beta\alpha} | \vec{q}_B{}', \kappa'_B, \alpha_B^0; \vec{q}_T{}', \kappa'_T, \alpha_T^0 \rangle^* \times$$
$$\times \delta(E_{\underline{p}}^\beta - E_{\underline{q'}}^\alpha) \delta(\vec{P} - \vec{Q}') a_B^*(\vec{q}_B{}') a_{\vec{\rho}_T}^*(\vec{q}_T{}'), \tag{61}$$

где $\vec{Q}' \equiv \vec{q}_B{}' + \vec{q}_T{}'$.

Имеем

$$\delta(\vec{P} - \vec{Q}) \delta(\vec{P} - \vec{Q}') = \delta(\vec{P} - \vec{Q}) \delta(\vec{Q} - \vec{Q}'),$$
$$\delta(E_{\underline{p}}^\beta - E_{\underline{q}}^\alpha) \delta(E_{\underline{p}}^\beta - E_{\underline{q'}}^\alpha) = \delta(E_{\underline{p}}^\beta - E_{\underline{q}}^\alpha) \delta(E_{\underline{q}}^\alpha - E_{\underline{q'}}^\alpha).$$

Подставляем эти выражения в (61) и воспользуемся теоремой о среднем значении для вынесения элементов T-матрицы из-под знака интеграла по импульсам частиц входного канала, получаем

$$\Pr(\{\Delta_i\}_1^N, \{m_i\}_1^N, \beta) = (2\pi)^2 \int_\Delta d^3\underline{p} \sum_{\kappa_B \kappa_T \kappa'_B \kappa'_T} \langle \kappa_B | \rho_B^{(spin)} | \kappa'_B \rangle \langle \kappa_T | \rho_T^{(spin)} | \kappa'_T \rangle \times$$
$$\times \langle \underline{p}, \underline{m}, \beta | T^{\beta\alpha} | \langle \vec{q}_B \rangle, \kappa_B, \alpha_B^0; \langle \vec{q}_T \rangle, \kappa_T, \alpha_T^0 \rangle \times$$
$$\times \langle \underline{p}, \underline{m}, \beta | T^{\beta\alpha} | \langle \vec{q}_B \rangle, \kappa'_B, \alpha_B^0; \langle \vec{q}_T \rangle, \kappa'_T, \alpha_T^0 \rangle^* \times$$
$$\times \delta(E_{\underline{p}}^\beta - E_{\langle \underline{q} \rangle}^\alpha) \delta(\vec{P} - \langle \vec{Q} \rangle) K(\vec{\rho}_T), \tag{62}$$

где $\langle \vec{q}_B \rangle$ и $\langle \vec{q}_T \rangle$ — некоторые "средние точки", лежащие в области локализации функций $a_B(\vec{q}_B)$ и $a_{\vec{\rho}_T}(\vec{q}_T)$, соответственно;

$$\langle \vec{Q} \rangle = \langle \vec{q}_B \rangle + \langle \vec{q}_T \rangle, \quad E_{\underline{q}}^\alpha = E_{\langle \vec{q}_B \rangle}^\alpha + E_{\langle \vec{q}_T \rangle}^\alpha,$$

$$K(\vec{\rho}_T) = \int d^3q_B d^3q_T d^3q'_B d^3q'_T a_B(\vec{q}_B) a_{\vec{\rho}_T}(\vec{q}_T) (a_B(\vec{q}_B{}') a_{\vec{\rho}_T}(\vec{q}_T{}'))^* \times$$
$$\times \delta(E_{\underline{q}}^\alpha - E_{\underline{q'}}^\alpha) \delta(\vec{Q} - \vec{Q}'). \tag{63}$$

Приступаем к вычислению интеграла (63). Поскольку вклад δ-функции в интеграл полностью определяется окрестностями нулей ее аргумента, можно в аргументе энергетической δ-функции оставить только линейные члены ряда Тейлора. Для произвольной гладкой функции $\phi(\vec{r})$ имеем

$$\phi(\vec{r} + \Delta\vec{r}) = \exp(\Delta\vec{r} \cdot \nabla) \phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) + (\Delta\vec{r} \cdot \nabla) \phi(\vec{r}) + \dots$$

Для функции $E(\vec{q}) = \sqrt{\vec{q}^2 + M^2}$, полагая $\vec{q} = \langle\vec{q}\rangle + (\vec{q} - \langle\vec{q}\rangle)$, получаем

$$E(\vec{q}) = E(\langle\vec{q}\rangle) + (\vec{q} - \langle\vec{q}\rangle)\langle\vec{\beta}\rangle + \ldots,$$

где $\langle\vec{\beta}\rangle = \langle\vec{q}\rangle/\sqrt{\langle\vec{q}\rangle^2 + M^2}$ — среднее значение скорости частицы с массой M и со средним значением импульса $\langle\vec{q}\rangle$. Следовательно,

$$E^{\alpha}_{\underline{q}} = E^{\alpha}_{\vec{q}_B} + E^{\alpha}_{\vec{q}_T} = E^{\alpha}_{\langle\vec{q}_B\rangle} + E^{\alpha}_{\langle\vec{q}_T\rangle} + (\vec{q}_B - \langle\vec{q}_B\rangle)\langle\vec{\beta}_B\rangle + (\vec{q}_T - \langle\vec{q}_T\rangle)\langle\vec{\beta}_T\rangle + \ldots,$$

$$E^{\alpha}_{\underline{q}'} = E^{\alpha}_{\vec{q}_B{}'} + E^{\alpha}_{\vec{q}_T{}'} = E^{\alpha}_{\langle\vec{q}_B\rangle} + E^{\alpha}_{\langle\vec{q}_T\rangle} + (\vec{q}_B{}' - \langle\vec{q}_B\rangle)\langle\vec{\beta}_B\rangle + (\vec{q}_T{}' - \langle\vec{q}_T\rangle)\langle\vec{\beta}_T\rangle + \ldots.$$

Отсюда находим

$$E^{\alpha}_{\underline{q}} - E^{\alpha}_{\underline{q}'} = (\vec{q}_B - \vec{q}_B{}')\langle\vec{\beta}_B\rangle + (\vec{q}_T - \vec{q}_T{}')\langle\vec{\beta}_T\rangle + \ldots$$

Подставляя это выражение и $\vec{Q} - \vec{Q}' = \vec{q}_B - \vec{q}_B{}' + \vec{q}_T - \vec{q}_T{}'$ в (63) и учитывая (55), получаем после интегрирования по $\vec{q}_T{}'$:

$$K(\vec{\rho}_T) = \int d^3q_B d^3q_T d^3q'_B a_B(\vec{q}_B) a_T(\vec{q}_T)(a_B(\vec{q}_B{}')a_T(\vec{q}_B - \vec{q}_B{}' + \vec{q}_T))^* \times$$
$$\times \exp(\imath\vec{\rho}_T(\vec{q}_B - \vec{q}_B{}'))\delta[(\vec{q}_B - \vec{q}_B{}')(\langle\vec{\beta}_B\rangle - \langle\vec{\beta}_T\rangle)]. \qquad (64)$$

Предположим, что область локализации в импульсном пространстве волнового пакета $a_B(\vec{q}_B)$ пучковой частицы значительно меньше области локализиции волнового пакета $a_T(\vec{q}_T)$ частицы-мишени. Тогда можно воспользоваться следующим приближением

$$a_B(\vec{q}_B)(a_B(\vec{q}_B{}')a_T(\vec{q}_B - \vec{q}_B{}' + \vec{q}_T))^* \approx a_B(\vec{q}_B)(a_B(\vec{q}_B{}')a_T(\vec{q}_T))^*, \qquad (65)$$

т.е. мы пренебрегаем изменением функции $a_T(\vec{q})$ на интервале $|\vec{q}_B - \vec{q}_B{}'|$. В результате интегрирование по $\vec{q}_T$ дает

$$\int d^3q_T a_T(\vec{q}_T)(a_T(\vec{q}_T))^* = 1, \qquad (66)$$

поскольку все пакеты нормированы на единицу.

Далее воспользуемся известным интегральным представлением δ-функции

$$\delta[(\vec{q}_B - \vec{q}_B{}') \cdot \Delta\vec{\beta}] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(\imath\lambda(\vec{q}_B - \vec{q}_B{}') \cdot \Delta\vec{\beta})\, d\lambda, \qquad (67)$$

где

$$\Delta\vec{\beta} \equiv \langle\vec{\beta}_B\rangle - \langle\vec{\beta}_T\rangle. \qquad (68)$$

Подставляя (66) и (67) в (64), находим

$$K(\vec{\rho}_T) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi} \int d^3q_B a_B(\vec{q}_B) \exp(\imath\vec{q}_B(\vec{\rho}_T + \lambda\Delta\vec{\beta}))\times$$

$$\times \int d^3 q'_B (a_B(\vec{q}_B{}'))^* \exp(-\imath \vec{q}_B{}' (\vec{\rho}_T + \lambda\Delta\vec{\beta})) =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi} \left| \int d^3 q_B a_B(\vec{q}_B) \exp(\imath \vec{q}_B (\vec{\rho}_T + \lambda\Delta\vec{\beta})) \right|^2 .$$

Интеграл по $\vec{q}_B$ является преобразованием Фурье пучкового пакета $a_B(\vec{q}_B)$, а поэтому, используя (54), находим

$$K(\vec{\rho}_T) = (2\pi)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| G_B(\vec{\rho}_T + \lambda\Delta\vec{\beta}) \right|^2 d\lambda, \tag{69}$$

где $G_B(\vec{r})$ — пучковый пакет в координатном представлении. Используя (69), представляем (62) в виде

$$\Pr(\{\Delta_i\}_1^N, \{m_i\}_1^N, \beta) = (2\pi)^2 \int_\Delta d^3 \underline{p}\, R^{\beta\alpha}(\underline{p}, \underline{m}, \beta) K(\vec{\rho}_T) =$$
$$= (2\pi)^4 \int_\Delta d^3 \underline{p}\, R^{\beta\alpha}(\underline{p}, \underline{m}, \beta) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| G_B(\vec{\rho}_T + \lambda\Delta\vec{\beta}) \right|^2 d\lambda, \tag{70}$$

где введено обозначение

$$R^{\beta\alpha}(\underline{p}, \underline{m}, \beta) = \delta(E^\beta_{\underline{p}} - E^\alpha_{\langle q \rangle}) \delta(\vec{P} - \langle \vec{Q} \rangle) \times$$
$$\times \sum_{\kappa_B \kappa_T \kappa'_B \kappa'_T} \langle \kappa_B | \rho_B^{(spin)} | \kappa'_B \rangle \langle \kappa_T | \rho_T^{(spin)} | \kappa'_T \rangle \times$$
$$\times \langle \underline{p}, \underline{m}, \beta | T^{\beta\alpha} | \langle \vec{q}_B \rangle, \kappa_B, \alpha_B^0; \langle \vec{q}_T \rangle, \kappa_T, \alpha_T^0 \rangle \times$$
$$\times \langle \underline{p}, \underline{m}, \beta | T^{\beta\alpha} | \langle \vec{q}_B \rangle, \kappa'_B, \alpha_B^0; \langle \vec{q}_T \rangle, \kappa'_T, \alpha_T^0 \rangle^* . \tag{71}$$

Формула (70) дает вероятность того, что при взаимодействии пучковой частицы с частицей-мишенью, локализованной в окрестности точки $\vec{\rho}_T$, импульсы продуктов реакции окажутся в интервалах $\{\Delta_i\}_1^N$, а проекции их спинов будут иметь значения $\{m_i\}_1^N$. Эта величина в формуле (34) обозначалась $w^{\beta\alpha}(\vec{\rho}_T)$. Для нахождения полной вероятности $W^{\beta\alpha}$ надо согласно (34) произвести суммирование по всем N_T частицам мишени, облучаемых пучком, т.е. находящихся в области локализации пучкового пакета $G_B(\vec{r})$. Если линейные размеры этого пакета значительно больше среднего расстояния между частицами мишени, можно сумму (34) аппроксимировать интегралом

$$W^{\beta\alpha} = \sum_{i=1}^{N_T} w^{\beta\alpha}(\vec{\rho}_i) \approx \int_V w^{\beta\alpha}(\vec{\rho}) \phi(\vec{\rho})\, d^3\rho, \tag{72}$$

где $\phi(\vec{\rho})$ — объемная плотность мишени (частиц/см^3), а интегрирование ведется по объему V, облучаемому пучком, т.е.

$$\int_V \phi(\vec{\rho})\, d^3\rho = N_T. \tag{73}$$

В формуле (70) от $\vec{\rho}$ зависит только интеграл по λ. Поэтому вычислим отдельно

$$L(\Delta\vec{\beta}) \equiv \int_V d^3\rho\phi(\vec{\rho}) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|G_B(\vec{\rho} + \lambda\Delta\vec{\beta})\right|^2 d\lambda. \qquad (74)$$

Если диаметр пучка меньше поперечного размера мишени, интегрирование в поперечной плоскости Π (см. рис.1) можно распространить формально на всю эту плоскость, поскольку вклад в интеграл (74) дает только та область, где$G_B(\vec{r})$ отлична от нуля. Получаем

$$L(\Delta\vec{\beta}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\rho_\perp \int\limits_H d\rho_\parallel \phi(\vec{\rho}) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|G_B(\vec{\rho} + \lambda\Delta\vec{\beta})\right|^2 d\lambda, \qquad (75)$$

где $\vec{\rho}_\parallel$ и $\vec{\rho}_\perp$ — компоненты вектора $\vec{\rho}$ вдоль падающего пучка и перпендикулярно ему, H — продольный размер мишени. Согласно определению (68)$\Delta\vec{\beta} = \langle\vec{\beta}_B\rangle - \langle\vec{\beta}_T\rangle$. В лабораторной системе отсчета $\langle\vec{\beta}_T\rangle = 0$, а поэтому $\Delta\vec{\beta} = \langle\vec{\beta}_B\rangle$, т.е. $\Delta\vec{\beta}$ имеет направление падающего пучка. Введем декартову систему координат с осью z вдоль $\Delta\vec{\beta}$, в которой интеграл (75) имеет вид

$$L(\Delta\vec{\beta}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho_x \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho_y \int\limits_H d\rho_z \phi(\rho_x, \rho_y, \rho_z) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|G_B(\rho_x, \rho_y, \rho_z + \lambda|\Delta\vec{\beta}|)\right|^2 d\lambda.$$

Вводя вместо λ новую переменную интегрирования

$$\xi = \rho_z + \lambda|\Delta\vec{\beta}|,$$

получаем

$$L(\Delta\vec{\beta}) = \frac{1}{|\Delta\vec{\beta}|} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho_x \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho_y g(\rho_x, \rho_y) \int\limits_{-\infty}^{\infty} |G_B(\rho_x, \rho_y, \xi)|^2 d\xi, \qquad (76)$$

где

$$g(\rho_x, \rho_y) \equiv \int\limits_H \phi(\rho_x, \rho_y, \rho_z) d\rho_z \qquad (77)$$

— поверхностная плотность мишени в точке (ρ_x, ρ_y). По теореме о среднем значении имеем

$$L(\Delta\vec{\beta}) = \frac{g(\tilde{\rho}_x, \tilde{\rho}_y)}{|\Delta\vec{\beta}|} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |G_B(x, y, z)|^2 dxdydz,$$

откуда с учетом условия единичной нормировки пакета $G_B(\vec{r})$ получаем

$$L(\Delta\vec{\beta}) = \frac{g(\tilde{\rho}_x, \tilde{\rho}_y)}{|\Delta\vec{\beta}|}, \qquad (78)$$

где $(\tilde{\rho}_x, \tilde{\rho}_y)$ — некоторая "средняя точка" в поперечной плоскости в области локализации пучкового пакета $G_B(\vec{r})$, зависящая от его формы.

Используя (70),(72),(74) и (78), находим

$$W^{\beta\alpha} = \frac{(2\pi)^4}{|\Delta\vec{\beta}|} \int_\Delta d^3\underline{p}\, R^{\beta\alpha}(\underline{p}, \underline{m}, \beta) g(\tilde{\rho}_x, \tilde{\rho}_y). \tag{79}$$

Это есть полная вероятность перехода системы из входного канала α в выходной канал β за счет взаимодействия пучковой частицы со всеми частицами мишени, причем импульсы продуктов реакции лежат в интервалах $\{\Delta_i\}_1^N$, а проекции спинов имеют значения $\{m_i\}_1^N$. Если импульсные интервалы устремить к нулю, получим

$$W^{\beta\alpha} = \frac{(2\pi)^4}{|\Delta\vec{\beta}|} R^{\beta\alpha}(\underline{p}, \underline{m}, \beta) g(\tilde{\rho}_x, \tilde{\rho}_y) \Delta\Omega, \tag{80}$$

где $\Delta\Omega = \int_\Delta d^3\underline{p}$ — малый объем импульсного пространства, заселенный зарегистрированными продуктами реакции.

Теперь, наконец, обратимся к определению (1) дифференциального сечения, которое используют экспериментаторы. Условием его применимости является постоянство поверхностной плотности n мишени. В формуле (80) поверхностная плотность дается функцией $g(x, y)$. Следовательно, в этой ситуации $g(x, y) = n$ в любой точке (x, y). Подставляя (80) в (1), получаем

$$\frac{d\sigma^{\beta\alpha}}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^4}{|\Delta\vec{\beta}|} R^{\beta\alpha}(\underline{p}, \underline{m}, \beta). \tag{81}$$

Подставляя сюда (71), находим

$$\frac{d\sigma^{\beta\alpha}}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^4}{|\Delta\vec{\beta}|} \times$$

$$\times \sum_{\kappa_B \kappa_T \kappa'_B \kappa'_T} \langle \underline{p}, \underline{m}, \beta | T^{\beta\alpha} | \vec{q}_B, \kappa_B, \alpha_B^0; \vec{q}_T, \kappa_T, \alpha_T^0 \rangle \langle \kappa_B, \kappa_T | \rho^{(spin)} | \kappa'_B, \kappa'_T \rangle \times$$

$$\times \langle \vec{q}_B, \kappa'_B, \alpha_B^0; \vec{q}_T, \kappa'_T, \alpha_T^0 | (T^{\beta\alpha})^+ | \underline{p}, \underline{m}, \beta \rangle \delta(E^\beta_{\underline{p}} - E^\alpha_{\underline{q}}) \delta(\vec{P} - \vec{Q}), \tag{82}$$

где

$$\langle \kappa_B, \kappa_T | \rho^{(spin)} | \kappa'_B, \kappa'_T \rangle = \langle \kappa_B | \rho_B^{(spin)} | \kappa'_B \rangle \langle \kappa_T | \rho_T^{(spin)} | \kappa'_T \rangle \tag{83}$$

— спиновая матрица плотности системы во входном состоянии. Здесь опущены знаки усреднения: вместо $\langle \vec{Q} \rangle$ и $E_{\langle \underline{q} \rangle}$ написаны $\vec{Q}$ и $E_{\underline{q}}$, поскольку в условиях высокой энергетической монохроматичности пучка различие практически отсутствует.

Важный частный случай соответствует отсутствию какой-либо спиновой упорядоченности во входном канале. Это значит, что

$$\langle \kappa_B, \kappa_T | \rho^{(spin)} | \kappa'_B, \kappa'_T \rangle = \frac{1}{2s_B + 1} \frac{1}{2s_T + 1} \delta_{\kappa_B \kappa'_B} \delta_{\kappa_T \kappa'_T}, \tag{84}$$

где s_B, s_T — спины частиц пучка и мишени. Подставляя (84) в (83), получаем из (82)

$$\frac{d\sigma^{\beta\alpha}}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^4}{|\Delta \vec{\beta}|} W_0 \sum_{\kappa_B \kappa_T} |\langle \underline{p}, \underline{m}, \beta | T^{\beta\alpha} | \vec{q}_B, \kappa_B, \alpha_B^0; \vec{q}_T, \kappa_T, \alpha_T^0 \rangle|^2 \times$$

$$\times \delta(E_{\underline{p}}^{\beta} - E_{\underline{q}}^{\alpha}) \delta(\vec{P} - \vec{Q}), \tag{85}$$

где

$$W_0 = [(2s_B + 1)(2s_T + 1)]^{-1}, \tag{86}$$

$$d\Omega = d^3p_1 d^3p_2 \dots d^3p_N, \quad \vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i, \quad \vec{Q} = \vec{q}_B + \vec{q}_T. \tag{87}$$

6 Обсуждение результатов

Важнейшая особенность полученного результата (82) состоит в том, что дифференциальное сечение не зависит от деталей приготовления начальных состояний сталкивающихся частиц в пространстве их центров масс. Действительно, волновые пакеты $a_B(\vec{q}_B)$ и $a_T(\vec{q}_T)$, введенные для описания движения центров масс этих частиц, выпали из окончательного результата. Это произошло в силу двух обстоятельств. Во-первых, энергетическая монохроматичность пучковых частиц предполагалась значительно более высокой, чем частиц мишени. Другими словами, область пространственной локализации пучковой частицы была значительно больше области локализации частиц мишени. Во-вторых, поверхностная плотность частиц мишени предполагалась постоянной во всей области, облучаемой пучком. Эти два обстоятельства привели к тому, что фактически пакеты $a_B(\vec{q}_B)$ и $a_T(\vec{q}_T)$ были использованы только в нормировочных интегралах.

Для упрощения формул мы использовали чистые состояния (53) в пространстве центров масс сталкивающихся частиц. Поскольку полученное дифференциальное сечение зависит только от соотношения размеров областей их пространственной локализации, можно утверждать, что формула (82) может быть непосредственно обобщена на случай произвольных смешанных состояний с теми же общими характеристиками пространственной (или импульсной) локализации.

Формула (85) для дифференциального сечения процесса с неполяризованным пучком совпадает с той, которая получена в [8] другим способом для тех же условий приготовления пучка и мишени.

7 Релятивистская инвариантность дифференциального сечения

Дифференциальное сечение $d\sigma^{\beta\alpha}$ не должно изменяться при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую. Однако, инвариантность полученной формулы (82) не очевидна. Преобразуем ее к инвариантному виду.

Если средние скорости $\vec{\beta}_B$ и $\vec{\beta}_T$ сталкивающихся частиц коллинеарны, то можно $\mid \Delta\vec{\beta} \mid$ представить в виде

$$\mid \Delta\vec{\beta} \mid = \mid \vec{\beta}_B + \pi\vec{\beta}_T \mid, \quad \pi = \pm 1. \tag{88}$$

Здесь опущены знаки усреднения. В этом случае инвариантную величину $(\mathcal{P}_B\mathcal{P}_T)^2$, где $\mathcal{P}_B$ и $\mathcal{P}_T$ — соответствующие 4-импульсы, можно представить в следующем виде:

$$(\mathcal{P}_B\mathcal{P}_T)^2 = (E_BE_T + \pi p_Bp_T)^2 = (E_Bp_T + \pi E_Tp_B)^2 + (M_TM_B)^2.$$

Поскольку $\vec{p} = \vec{\beta}E$ для каждой частицы, получаем

$$(\mathcal{P}_B\mathcal{P}_T)^2 = (E_BE_T)^2(\beta_T + \pi\beta_B)^2 + (M_TM_B)^2.$$

Отсюда находим

$$|\beta_B + \pi\beta_T| = \sqrt{(\mathcal{P}_B\mathcal{P}_T)^2 - (M_BM_T)^2}/(E_BE_T). \tag{89}$$

Введем в рассмотрение квадрат эффективной массы этой пары частиц

$$s \equiv (\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_T)^2 = M_B^2 + M_T^2 + 2\mathcal{P}_B\mathcal{P}_T,$$

откуда находим

$$\mathcal{P}_B\mathcal{P}_T = (s - M_B^2 - M_T^2)/2. \tag{90}$$

Далее

$$(\mathcal{P}_B\mathcal{P}_T)^2 - (M_BM_T)^2 = [s - (M_B - M_T)^2][s - (M_B + M_T)^2]/4.$$

Теперь (89) можно переписать в виде

$$|\beta_B + \pi\beta_T| = [s - (M_B - M_T)^2]^{1/2}[s - (M_B + M_T)^2]^{1/2}/(2E_BE_T),$$

т.е.

$$|\beta_B + \pi\beta_T| = \sqrt{\lambda(s, M_B^2, M_T^2)}/(2E_B E_T), \tag{91}$$

где

$$\lambda(x,y,z) \equiv x^2+y^2+z^2-2(xy+xz+yz) = [x-(\sqrt{y}+\sqrt{z})^2][x-(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2] \tag{92}$$

называется "кинематической" функцией.

Далее покажем, что $\delta(\mathcal{P})$, где $\mathcal{P}$ — 4-импульс, является инвариантом преобразования Лоренца. Рассмотрим преобразование вдоль оси z:

$$\delta(\mathcal{P}) = \delta(E)\delta(p_x)\delta(p_y)\delta(p_z) = \delta(\gamma_c E^* + \gamma_c\beta_c p_z^*)\delta(p_x^*)\delta(p_y^*)\delta(\gamma_c p_z^* + \gamma_c\beta_c E^*),$$

где β_c — переносная скорость системы $(*)$ относительно исходной системы отсчета, γ_c — соответствующий Лоренц-фактор. Используя интегральное представление δ -функции, получаем

$$\delta(E)\delta(p_z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \exp(\imath E^*(\kappa\gamma_c\beta_c + \lambda\gamma_c))\exp(\imath p_z^*(\kappa\gamma_c + \lambda\gamma_c\beta_c))\,d\kappa\,d\lambda.$$

Введем новые переменные интегрирования

$$\kappa' = \kappa\gamma_c + \lambda\gamma_c\beta_c, \quad \lambda' = \kappa\gamma_c\beta_c + \lambda\gamma_c.$$

Якобиан этого преобразования есть

$$\frac{D(\kappa',\lambda')}{D(\kappa,\lambda)} = \gamma_c^2(1-\beta_c^2) = 1,$$

т.е.

$$\frac{D(\kappa',\lambda')}{D(\kappa,\lambda)} = 1.$$

Следовательно,

$$\delta(E)\delta(p_z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \exp(\imath E^*\lambda')\exp(\imath p_z^*\kappa')\,d\kappa'\,d\lambda' = \delta(E^*)\delta(p_z^*),$$

т.е.

$$\delta(E)\delta(p_z) = \delta(E^*)\delta(p_z^*), \quad \delta(\mathcal{P}) = inv. \tag{93}$$

Далее покажем, что d^3p/E является инвариантом. Имеем

$$\frac{d^3p}{E} = \frac{dp_x dp_y dp_z}{E} = \frac{dp_x^* dp_y^*(\gamma_c dp_z^* + \gamma_c\beta_c dE^*)}{\gamma_c(E^* + \beta_c p_z^*)} =$$

$$= \frac{dp_x^* dp_y^* \gamma_c dp_z^*(1+\beta_c\beta_z^*)}{\gamma_c E^*(1+\beta_c\beta_z^*)} = \frac{dp_x^* dp_y^* dp_z^*}{E^*},$$

т.е.
$$d^3p/E = inv. \tag{94}$$

Используя (91) , (93) и (94) , запишем (82) в виде

$$d\sigma^{\beta\alpha} = \frac{2(2\pi)^4}{\sqrt{\lambda(s, M_B^2, M_T^2)}} \times$$
$$\times \sum_{\kappa_B \kappa_T \kappa'_B \kappa'_T} \langle \underline{p}, \underline{m}, \beta | \tilde{T}^{\beta\alpha} | \vec{q}_B, \kappa_B, \alpha_B^0; \vec{q}_T, \kappa_T, \alpha_T^0 \rangle \langle \kappa_B, \kappa_T | \rho^{(spin)} | \kappa'_B, \kappa'_T \rangle \times$$
$$\times \langle \vec{q}_B, \kappa'_B, \alpha_B^0; \vec{q}_T, \kappa'_T, \alpha_T^0 | (\tilde{T}^{\beta\alpha})^+ | \underline{p}, \underline{m}, \beta \rangle \delta(\mathcal{P}_{in} - \mathcal{P}_{out}) \prod_{j=1}^{N} \frac{d^3 p_j}{E_j}, \tag{95}$$

где
$$\tilde{T}^{\beta\alpha} = \sqrt{E_1 E_2 \ldots E_N} T^{\beta\alpha} \sqrt{E_B E_T}, \tag{96}$$

$\mathcal{P}_{in}, \mathcal{P}_{out}$ — суммарные 4-импульсы входного и выходного каналов. Введенная здесь матрица $\tilde{T}^{\beta\alpha}$ является релятивистским инвариантом. Это следует из инвариантности $d\sigma^{\beta\alpha}$ и всех остальных сомножителей в правой части (95). Поэтому вычисление матрицы $\tilde{T}^{\beta\alpha}$ может быть произведено в любой системе отсчета. Однако, во многих случаях предпочтительной оказывается C-система, где $\vec{p}_a^{\,*} + \vec{p}_b^{\,*} = 0$. Это, в частности, определяется выбором наиболее удобных интегралов движения для задания состояний. Одним из них часто бывает полный угловой момент системы. Коммутационное соотношение компонент J_i его оператора и оператора $\vec{P} = \vec{p}_a + \vec{p}_b$ суммарного 3-импульса системы имеет вид

$$[J_i, P_k] = \imath \sum_l \varepsilon_{ikl} P_l, \tag{97}$$

где ε_{ikl} — антисимметричный единичный тензор. Поскольку этот коммутатор отличен от нуля, полный угловой момент и полный 3-импульс системы, вообще говоря, не являются совместными интегралами движения. Если же ограничиться только теми состояниями $|\psi\rangle$ системы, которые удовлетворяют условию

$$\vec{P}|\psi\rangle = 0, \tag{98}$$

коммутатор (97) обращается в нуль. Это значит, что в пространстве состояний, принадлежащих C-системе, в полный набор физических величин могут быть включены $\vec{J}^2, J_z, \vec{P} = 0$.

Аналогично, оператор $\mathcal{P}$ пространственной инверсии коммутирует с оператором $\vec{P}$ только в пространстве состояний (98). Поэтому только в C-системе указанный выше набор совместных физических величин может быть дополнен четностью.

Таким образом, вычислив матрицу $T_C^{\beta\alpha}$ в C-системе, с помощью формулы (96) можно легко найти релятивистски инвариантную матрицу$\tilde{T}^{\beta\alpha}$, а также T-матрицу в любой другой системе отсчета. Например, T-матрица в L-системе будет иметь вид

$$T_L^{\beta\alpha} = \left(\frac{E_B^* E_T^* E_1^* E_2^* \dots E_N^*}{E_B^L E_T^L E_1^L E_2^L \dots E_N^L} \right)^{1/2} T_C^{\beta\alpha}, \tag{99}$$

где E_i^*, E_i^L — энергии частицы i в C- и L-системах, соответственно.

8 Двухчастичный процесс

Применим формулу (95) к двухчастичной реакции

$$a + b \to 1 + 2. \tag{100}$$

Сперва сделаем это в L -системе, где $\vec{p}_b = 0$. Имеем

$$\mathcal{P}_{in} = (E_a + M_b, \vec{p}_a), \quad \mathcal{P}_{out} = (E_1 + E_2, \vec{p}_1 + \vec{p}_2). \tag{101}$$

Выражение (95) представим в виде

$$d\sigma^{\beta\alpha} = \mathcal{A}(\vec{p}_a, \vec{p}_b, \vec{p}_1, \vec{p}_2, m_1, m_2) \delta(\mathcal{P}_{in} - \mathcal{P}_{out})\, d^3p_1 d^3p_2,$$

где

$$\mathcal{A}(\vec{p}_a, \vec{p}_b, \vec{p}_1, \vec{p}_2, m_1, m_2) = \frac{2(2\pi)^4}{\sqrt{\lambda(s, M_a^2, M_b^2)}} \times$$

$$\times \sum_{\kappa_a \kappa_b \kappa'_a \kappa'_b} \langle \vec{p}_1, m_1, \vec{p}_2, m_2, \beta | \tilde{T}^{\beta\alpha} | \vec{p}_a, \kappa_a, \alpha_a^0; \vec{p}_b, \kappa_b, \alpha_b^0 \rangle \langle \kappa_a, \kappa_b | \rho^{(spin)} | \kappa'_a, \kappa'_b \rangle \times$$

$$\times \langle \vec{p}_a, \kappa'_a, \alpha_a^0; \vec{p}_b, \kappa'_b, \alpha_b^0 | (\tilde{T}^{\beta\alpha})^+ | \vec{p}_1, m_1, \vec{p}_2, m_2, \beta \rangle, \tag{102}$$

$$\delta(\mathcal{P}_{in} - \mathcal{P}_{out}) = \delta(E_1 + E_2 - E_a - M_a) \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_a).$$

Интегрируя по $\vec{p}_2$, получаем

$$d\sigma^{\beta\alpha} = \mathcal{A}(\vec{p}_a, \vec{p}_b, \vec{p}_1, \vec{p}_a - \vec{p}_1, m_1, m_2) \delta(E_1 + \sqrt{(\vec{p}_a - \vec{p}_1)^2 + M_2^2} - E_a - M_a)\, d^3p_1. \tag{103}$$

Имеем $d^3p_1 = p_1^2 dp_1 d\Omega_1 = p_1 E_1 dE_1 d\Omega_1$. Для интегрирования по E_1 воспользуемся известным представлением δ-функции от аргумента, являющегося функцией независимой переменной x:

$$\delta[f(x)] = \sum_{i=1}^{k} \frac{\delta(x - x_i)}{|df(x_i)/dx|}, \quad f(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \tag{104}$$

В нашем случае

$$f(E_1) = E_1 + \sqrt{(\vec{p}_a - \vec{p}_1)^2 + M_2^2} - E_a - M_a,$$

где

$$E_1^2 = p_1^2 + M_1^2, \qquad (\vec{p}_a - \vec{p}_1)^2 = p_a^2 + p_1^2 - 2p_a p_1 \cos\theta_1.$$

Имеем отсюда

$$\frac{df(E_1)}{dE_1} = 1 + \frac{E_1}{\sqrt{(\vec{p}_a - \vec{p}_1)^2 + M_2^2}}(1 - \vec{p}_a \cdot \vec{p}_1/p_1^2).$$

Обозначим $\{E_1^i\}$ корни уравнения $f(E_1) = 0$, тогда $p_1^i = \sqrt{(E_1^i)^2 - M_1^2}, \quad E_2^i = \sqrt{(\vec{p}_a - \vec{p}_1{}^i)^2 + M_2^2}$. Следовательно, $E_1^i + E_2^i = E_a + M_a$,

$$\frac{df(E_1^i)}{dE_1} = 1 + \frac{E_1^i}{E_2^i}(1 - \vec{p}_a \cdot \vec{p}_1{}^i/(p_1^i)^2). \tag{105}$$

Итак,

$$\delta(E_1 + \sqrt{(\vec{p}_a - \vec{p}_1)^2 + M_2^2} - E_a - M_a) = \sum_i \delta(E_1 - E_1^i) \left| 1 + \frac{E_1^i}{E_2^i}(1 - \frac{\vec{p}_a \cdot \vec{p}_1{}^i}{(p_1^i)^2}) \right|^{-1}.$$

Интегрируя (103) по E_1, получаем

$$d\sigma^{\beta\alpha} = \sum_i \mathcal{A}(\vec{p}_a, \vec{p}_b, \vec{p}_1{}^i, \vec{p}_a - \vec{p}_1{}^i, m_1, m_2) \frac{p_1^i E_1^i}{|R(E_1^i)|} d\Omega_1,$$

где

$$R(E_1^i) \equiv 1 + \frac{E_1^i}{E_2^i}\left(1 - \frac{\vec{p}_a \cdot \vec{p}_1{}^i}{(p_1^i)^2}\right) = 1 - \frac{\vec{\beta}_1{}^i \cdot \vec{\beta}_2{}^i}{(\beta_1^i)^2}, \tag{106}$$

$\vec{\beta}_1{}^i, \vec{\beta}_2{}^i$ — скорости продуктов реакции ($\vec{\beta} = \vec{p}/E$). Подставляя сюда функцию (102), находим

$$\frac{d\sigma^{\beta\alpha}}{d\Omega_1} = \frac{2(2\pi)^4}{\sqrt{\lambda(s, M_a^2, M_b^2)}} \times$$

$$\times \sum_i \langle \vec{p}_1{}^i, m_1, \vec{p}_a - \vec{p}_1{}^i, m_2, \beta | \tilde{T}^{\beta\alpha} \rho_0 (\tilde{T}^{\beta\alpha})^+ | \vec{p}_1{}^i, m_1, \vec{p}_a - \vec{p}_1{}^i, m_2, \beta \rangle \frac{p_1^i/E_2^i}{|R(E_1^i)|}. \tag{107}$$

Здесь суммирование ведется по всем корням системы уравнений

$$E_1^i + E_2^i = E_a + M_a, \quad \vec{p}_1{}^i + \vec{p}_2{}^i = \vec{p}_a, \tag{108}$$

которая выражает законы сохранения энергии и импульса. При заданном направлении Ω_1 вылета частицы 1 в L-системе эта система уравнений может иметь от нуля до двух решений.

Теперь вычислим дифференциальное сечение в C-системе, где $\vec{p}_a{}^* + \vec{p}_b{}^* = 0$, а все величины будем снабжать звездочкой $(*)$. Имеем

$$\mathcal{P}_{in} = (E_a^* + E_b^*, 0), \quad \mathcal{P}_{out} = (E_1^* + E_2^*, \vec{p}_1{}^* + \vec{p}_2{}^*). \tag{109}$$

Выражение (95) представим в виде

$$d\sigma^{\beta\alpha} = \mathcal{A}(\vec{p}_a{}^*, \vec{p}_b{}^*, \vec{p}_1{}^*, \vec{p}_2{}^*, m_1, m_2)\delta(\mathcal{P}_{in} - \mathcal{P}_{out})\, d^3p_1^* d^3p_2^*,$$

где

$$\delta(\mathcal{P}_{in} - \mathcal{P}_{out}) = \delta(E_1^* + E_2^* - E_a^* - E_b^*)\delta(\vec{p}_1{}^* + \vec{p}_2{}^*).$$

Интегрируя по $\vec{p}_2{}^*$, получаем

$$d\sigma^{\beta\alpha} = \mathcal{A}(\vec{p}_a{}^*, \vec{p}_b{}^*, \vec{p}_1{}^*, -\vec{p}_1{}^*, m_1, m_2)\delta(E_1^* + \sqrt{(p_1^*)^2 + M_2^2} - E_a^* - E_b^*)\, d^3p_1^*, \tag{110}$$

где $d^3p_1^* = p_1^* E_1^* dE_1^* d\Omega_1^*$. Обозначим $f(E_1^*) = E_1^* + \sqrt{(p_1^*)^2 + M_2^2} - E_c$, $E_c \equiv E_a^* + E_b^*$, $(E_1^*)^2 = (p_1^*)^2 + M_1^2$. Отсюда получаем $f(E_1^*) = E_1^* + \sqrt{(E_1^*)^2 - M_1^2 + M_2^2} - E_c$,

$$\frac{df(E_1^*)}{dE_1^*} = 1 + \frac{E_1^*}{\sqrt{(E_1^*)^2 - M_1^2 + M_2^2}}. \tag{111}$$

Найдем корни уравнения $f(E_1^*) = 0$. Имеем $\sqrt{(E_1^*)^2 - M_1^2 + M_2^2} = E_c - E_1^*$, откуда находим

$$E_1^* = \frac{E_c^2 + M_1^2 - M_2^2}{2E_c}. \tag{112}$$

Подставляя это в (111), получаем

$$\frac{df(E_1^*)}{dE_1^*} = 1 + \frac{E_1^*}{E_2^*}, \qquad \text{где} \quad E_2^* = (E_c^2 + M_2^2 - M_1^2)/(2E_c). \tag{113}$$

Интегрируя (110) по E_1^*, находим

$$d\sigma^{\beta\alpha} = \mathcal{A}(\vec{p}_a{}^*, -\vec{p}_a{}^*, \vec{p}_1{}^*, -\vec{p}_1{}^*, m_1, m_2)\frac{p_1^* E_1^*}{1 + E_1^*/E_2^*} d\Omega_1^*,$$

где $p_1^* = \sqrt{(E_1^*)^2 - M_1^2}$. Подставляя сюда функцию (102), получаем

$$\frac{d\sigma^{\beta\alpha}}{d\Omega_1^*} = \frac{2(2\pi)^4}{\sqrt{\lambda(s, M_a^2, M_b^2)}}\times$$

$$\times\langle\vec{p}_1{}^*, m_1, -\vec{p}_1{}^*, m_2, \beta|\tilde{T}^{\beta\alpha}\rho_0(\tilde{T}^{\beta\alpha})^+|\vec{p}_1{}^*, m_1, -\vec{p}_1{}^*, m_2, \beta\rangle\frac{p_1^*/E_2^*}{1 + E_1^*/E_2^*}, \tag{114}$$

где $\vec{p}_1{}^*$ — импульс частицы 1 в C-системе.

9 Трехчастичный процесс

Применим формулу (95) к трехчастичной реакции

$$a + b \to 1 + 2 + 3. \tag{115}$$

В произвольной системе отсчета имеем

$$d\sigma^{\beta\alpha} = \mathcal{A}(\vec{p}_a, \vec{p}_b, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, m_1, m_2, m_3)\delta(\mathcal{P}_{in} - \mathcal{P}_{out}) \prod_{j=1}^{3} \frac{d^3p_j}{E_j}, \tag{116}$$

где

$$\mathcal{A}(\vec{p}_a, \vec{p}_b, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, m_1, m_2, m_3) = \frac{2(2\pi)^4}{\sqrt{\lambda(s, M_a^2, M_b^2)}} \times$$

$$\times \sum_{\kappa_a \kappa_b \kappa'_a \kappa'_b} \langle \vec{p}_1, m_1, \vec{p}_2, m_2, \vec{p}_3, m_3, \beta | \tilde{T}^{\beta\alpha} | \vec{p}_a, \kappa_a, \alpha_a^0; \vec{p}_b, \kappa_b, \alpha_b^0 \rangle \langle \kappa_a, \kappa_b | \rho^{(spin)} | \kappa'_a, \kappa'_b \rangle \times$$

$$\times \langle \vec{p}_a, \kappa'_a, \alpha_a^0; \vec{p}_b, \kappa'_b, \alpha_b^0 | (\tilde{T}^{\beta\alpha})^+ | \vec{p}_1, m_1, \vec{p}_2, m_2, \vec{p}_3, m_3, \beta \rangle, \tag{117}$$

$$\mathcal{P}_{in} = (E_a + E_b, \vec{p}_a + \vec{p}_b), \qquad \mathcal{P}_{out} = (E_1 + E_2 + E_3, \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3). \tag{118}$$

Интегрируя (116) по $\vec{p}_3$, получаем

$$d\sigma^{\beta\alpha} = \mathcal{A}(\vec{p}_a, \vec{p}_b, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, m_1, m_2, m_3)\delta(E_a + E_b - E_1 - E_2 - E_3) \frac{d^3p_1 d^3p_2}{E_1 E_2 E_3}, \tag{119}$$

где следует положить

$$\vec{p}_3 = \vec{p}_a + \vec{p}_b - \vec{p}_1 - \vec{p}_2, \qquad E_3 = \sqrt{(\vec{p}_a + \vec{p}_b - \vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 + M_3^2}. \tag{120}$$

Поскольку $p_i \, dp_i = E_i \, dE_i$, имеем

$$\frac{d^3p_1 d^3p_2}{E_1 E_2} = p_1 p_2 \, dE_1 \, d\Omega_1 \, dE_2 \, d\Omega_2. \tag{121}$$

Для интегрирования по E_2 воспользуемся формулой (104), где следует положить

$$f(E_2) = E_a + E_b - E_1 - E_2 - \sqrt{(\vec{q} - \vec{p}_2)^2 + M_3^2}, \qquad \vec{q} \equiv \vec{p}_a + \vec{p}_b - \vec{p}_1.$$

Дифференцируя по E_2 с учетом того, что $p_2 = \sqrt{E_2^2 - M_2^2}$, получаем

$$\frac{df(E_2)}{dE_2} = -1 - \frac{E_2}{E_3}\left(1 - \frac{\vec{q}\vec{p}_2}{p_2^2}\right),$$

где E_3 дается формулой (120). Подставляя сюда $\vec{q} = \vec{p}_2 + \vec{p}_3$ с учетом того, что скорость свободной частицы i есть $\vec{\beta}_i = \vec{p}_i / E_i$, находим

$$\frac{df(E_2)}{dE_2} = -1 + \frac{\vec{\beta}_2 \vec{\beta}_3}{\beta_2^2}.$$

Следовательно,

$$\delta(E_a + E_b - E_1 - E_2 - E_3) = \sum_i \frac{\delta(E_2 - E_2^i)}{|1 - \vec{\beta}_2 \vec{\beta}_3 / \beta_2^2|}. \qquad (122)$$

Подставляя (121) и (122) в (119) и интегрируя по E_2, получаем

$$\frac{d\sigma^{\beta\alpha}}{dE_1\, d\Omega_1\, d\Omega_2} = p_1 \sum_i \mathcal{A}(\vec{p}_a, \vec{p}_b, \vec{p}_1, \vec{p}_2{}^i, \vec{p}_3{}^i, m_1, m_2, m_3) \frac{p_2^i / E_3^i}{|R(E_2^i)|}, \qquad (123)$$

где $R(E_2^i) = 1 - \vec{\beta}_2{}^i \vec{\beta}_3{}^i / (\beta_2^i)^2$, а суммирование производится по всем корням E_2^i уравнения

$$E_a + E_b - E_1 - E_2 - E_3 = 0, \quad \text{где} \quad E_3 = \sqrt{(\vec{p}_a + \vec{p}_b - \vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 + M_3^2}.$$

При заданных направлениях Ω_1 и Ω_2 вылета частиц и энергии E_1 одной из них это кинематическое уравнение может иметь не более двух корней.

Полученная формула (123) дает функцию угловой и энергетической корреляции любых двух продуктов трехчастичной реакции в произвольной системе отсчета. Интегрируя это выражение по Ω_2, можно получить энергетический спектр частицы 1, вылетающей в направлении Ω_1.

10 Дифференциальные сечения в импульсном и координатном пространствах

В определениях (1) и (2) дифференциального сечения под $\Delta\Omega$ имеется в виду элемент *импульсного* пространства продуктов реакции. В то же время детекторы в условиях реального эксперимента регистрируют частицы, которые вылетают в определенном направлении в *координатном* пространстве. Поскольку импульсное и координатное представления, вообще говоря, различны для произвольно взятого вектора состояния, возникает вопрос о применимости теоретических формул для дифференциальных сечений к интерпретации экспериментальных данных.

Важной отличительной особенностью измерительной процедуры, связанной с измерением дифференциального сечения, является то обстоятельство, что измерение физических величин (угловых координат и энергии) производится по истечении очень большого временного промежутка ($\Delta t \to \infty$), в течение которого система совершает *свободное* движение. Следствием этого является асимптотическое исчезновение различия между импульсным и координатным угловыми распределениями.

Пусть $\tilde{\psi}(\vec{p})$ — волновая функция некоторого произвольного состояния нерелятивистской частицы в импульсном представлении при $t = 0$. Тогда при $t > 0$ в условиях свободного движения волновая функция этой частицы есть

$$\tilde{\psi}(\vec{p}, t) = \exp(-\imath E_p t)\tilde{\psi}(\vec{p}), \quad E_p = \frac{p^2}{2M}, \tag{124}$$

где M — масса частицы. В координатном представлении волновая функция этого же состояния есть

$$\psi(\vec{r}, t) = (2\pi)^{-3/2} \int \exp(\imath \vec{p}\vec{r})\tilde{\psi}(\vec{p}, t) d^3 p =$$

$$= 2\pi)^{-3/2} \int \exp(\imath S(\vec{p}, \vec{r}; t)\tilde{\psi}(\vec{p}) d^3 p, \tag{125}$$

где

$$S(\vec{p}, \vec{r}; t) = \vec{p}\vec{r} - E_p t \tag{126}$$

— фазовая функция.

Отсюда видно, что при $t \to \infty$ период осцилляций функции $\exp(\imath S(\vec{p}, \vec{r}; t)$ по переменной $\vec{p}$ при фиксированном $\vec{r}$, вообще говоря, неограниченно уменьшается. Это ведет к тому, что основной вклад в интеграл (125) дают стационарные точки $\vec{p}^{(0)}$ фазовой функции, в окрестности которых осцилляции "замирают". Найдем эти стационарные точки. Для этого представим фазовую функцию (126) в виде

$$S(\vec{p}, \vec{r}; t) = \sum_{j=1}^{3} \phi(p_j, x_j; t), \tag{127}$$

где

$$\phi(p_j, x_j; t) = p_j x_j - \frac{p_j^2}{2M} t, \tag{128}$$

p_j, x_j — декартовы компоненты векторов $\vec{p}, \vec{r}$. Критические точки определяются условием экстремума фазовой функции

$$\frac{\partial \phi(p_j, x_j; t)}{\partial p_j} = 0. \tag{129}$$

Подставляя сюда (128), находим

$$p_j^{(0)} = \frac{M}{t} x_j. \tag{130}$$

Выделяя полный квадрат, представим (128) в виде

$$\phi(p_j, x_j; t) = \frac{M x_j^2}{2t} - \frac{t}{2M}(p_j - p_j^{(0)})^2. \tag{131}$$

Рис. 2: Фазовая функция $\phi(p_j, x_j; t)$ при $x_j = const$ и $t = t_1 < t_2 < t_3 < t_4$.

Это есть квадратичная парабола по переменной p_j, вершина которой находится в точке с координатами $(p_j^{(0)}, Mx_j^2/2t)$, причем при $t > 0$ в этой точке имеется максимум (рис.2).

При любом фиксированном x_j увеличение t приводит к тому, что вершина параболы неограниченно приближается к началу координат, а ее раствор неограниченно уменьшается. Это значит, что при $t \to \infty$ становится неограниченно малой окрестность критической точки $p_j^{(0)}$, в которой осцилляции функции $\exp(\imath\phi(p_j, x_j; t))$ "замирают". Поэтому при $t \to \infty$ эффективная область интегрирования в (125) неограниченно стягивается к точке

$$\vec{p}^{\,(0)} = \frac{M\vec{r}}{t}. \tag{132}$$

Если функция $\tilde{\psi}(\vec{p})$ несущественно изменяется в окрестности этой критической точки, ее можно вынести из-под знака интеграла в точке$\vec{p} = \vec{p}^{\,(0)}$. Тогда из (125) и (127) получаем

$$\psi(\vec{r}, t)_{t\to\infty} = (2\pi)^{-3/2}\tilde{\psi}(\vec{p}^{\,(0)}) \prod_{j=1}^{3} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\imath\phi(p_j, x_j; t) dp_j. \tag{133}$$

Подставляя сюда (131) и интегрируя, находим

$$\psi(\vec{r}, t)_{t\to\infty} = (M/t)^{3/2}\tilde{\psi}(M\vec{r}/t) \exp\left[\imath\left(\frac{Mr^2}{2t} - \frac{3}{4}\pi\right)\right]. \tag{134}$$

Эта формула устанавливает простую связь волновых функций произвольного состояния свободной частицы в импульсном и координатном представлениях при условии, что свободное движение происходит достаточно долго. Отсюда получаем связь импульсного и координатного распределений свободной частицы при $t \to \infty$:

$$W(\vec{r},t)_{t\to\infty} = |\psi(\vec{r},t)|^2_{t\to\infty} = (M/t)^3 \tilde{W}(M\vec{r}/t), \qquad (135)$$

где

$$\tilde{W}(\vec{p}) = |\tilde{\psi}(\vec{p})|^2 \qquad (136)$$

— импульсное распределение, которое при свободном движении, конечно, не зависит от времени.

Для угловых распределений в координатном и импульсном пространствах имеем

$$\Pr(\hat{\vec{r}},t)_{t\to\infty} = \int\limits_0^\infty W(\vec{r},t)_{t\to\infty} r^2 dr, \quad \tilde{\Pr}(\hat{\vec{p}}) = \int\limits_0^\infty \tilde{W}(\vec{p}) p^2 dp, \qquad (137)$$

где $\hat{\vec{r}} = \vec{r}/r$ — единичный вектор в направлении $\vec{r}$. Подставляя сюда (135), получаем

$$\Pr(\hat{\vec{r}},t)_{t\to\infty} = \int\limits_0^\infty (M/t)^3 \tilde{W}(M\vec{r}/t) r^2 dr.$$

Вводя здесь новую переменную интегрирования $\vec{k} = M\vec{r}/t$, получаем

$$\Pr(\hat{\vec{r}},t)_{t\to\infty} = \int\limits_0^\infty \tilde{W}(\vec{k}) k^2 dk,$$

т.е.

$$\Pr(\hat{\vec{r}},t)_{t\to\infty} = \tilde{\Pr}(\hat{\vec{r}}), \qquad (138)$$

поскольку $\hat{\vec{k}} = \hat{\vec{r}}$.

Следовательно, при $t \to \infty$ угловые распределения в координатном и импульсном пространствах совпадают. Это свойство свободного движения позволяет сопоставлять экспериментальное угловое распределение, полученное в координатном пространстве, с теоретическим угловым распределением, рассчитанным в импульсном пространстве.

Литература

[1] Люк К. Л. Юан, Ву Цзянь-Сюн. Измерение характеристик ядерных реакций и пучков частиц. — М.: Мир, 1965.

[2] Мессиа А. Квантовая механика, том 1.—М.: Наука, 1978.

[3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. —М.: Наука, 1989.

[4] Давыдов А. С. Квантовая механика. —М.: Наука, 1973.

[5] Балашов В. В. Квантовая теория столкновений. —М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.

[6] И. фон Нейман. Математические основы квантовой механики. —М.: Наука, 1964.

[7] Тейлор Дж. Теория рассеяния. —М.: Мир,1975.

[8] Гольдбергер М., Ватсон К. Теория столкновений. —М.: Мир,1967.

Содержание

Учебное издание

Владислав Константинович Долинов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ СЕЧЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ПРОЦЕССА В НЕСТАЦИОНАРНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ СТОЛКНОВЕНИЙ С РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КИНЕМАТИКОЙ

Работа поступила в ОНТИ 21.06.2004 г.

Редактор *Стратилатова К. И.*

Тираж 50 экз.